<u>Prop</u>: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, f continua in I

1) se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0

allora x_0 è punto di minimo locale.

2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 $\Rightarrow$ x_0 è punto di massimo locale.

Es: $f(x) = x^3 - x$

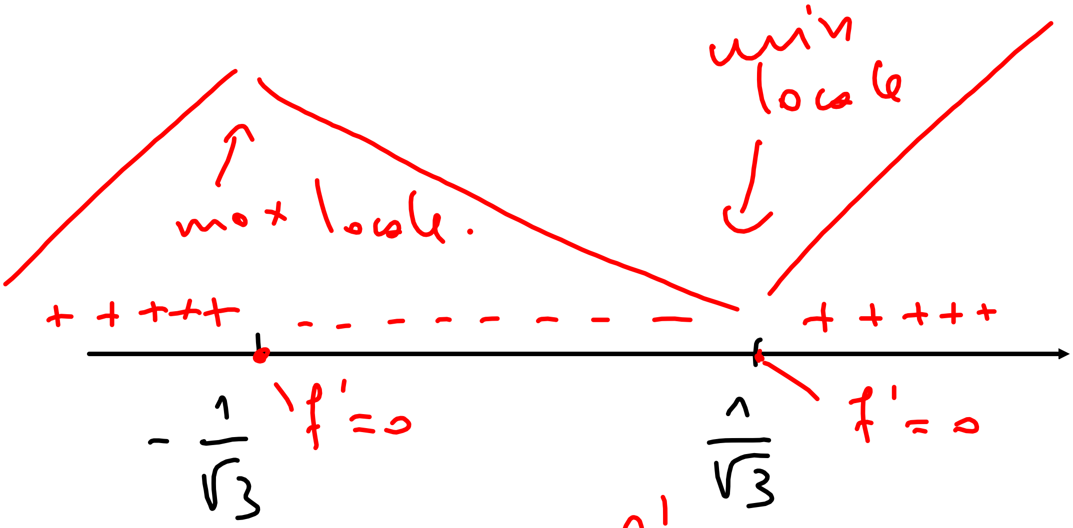
$f'(x) = 3x^2 - 1$

segno di f'

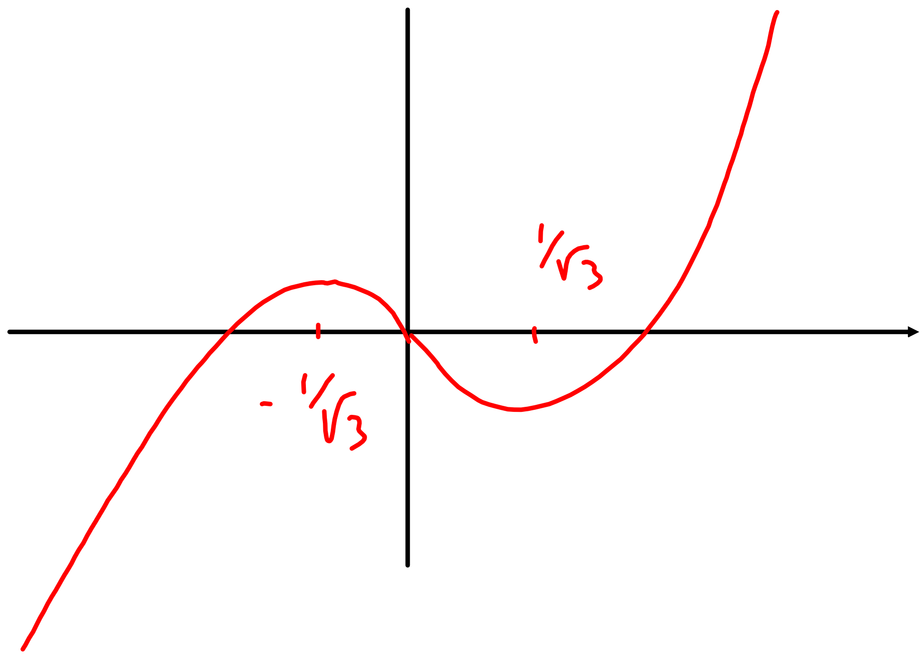
$3x^2 - 1 \geq 0$ $\quad$ $x^2 \geq \frac{1}{3}$

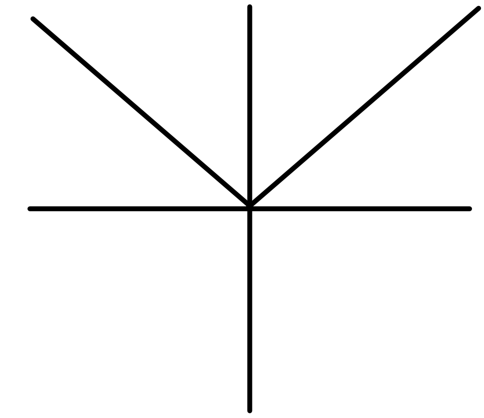
$|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$



segno di f'

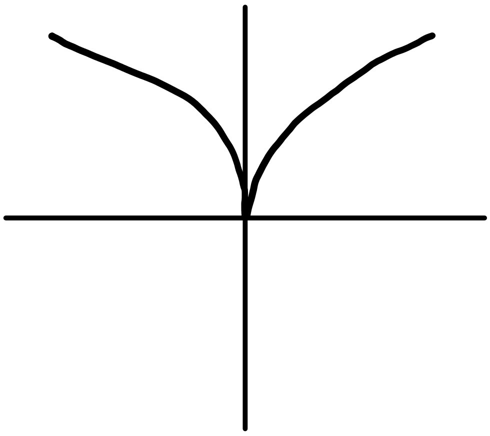

1/√3
- 1/√3



$f(x) = |x|$

$x_0 = 0$ punto di min

$\nexists\ f'(0)$



$f(x) = \sqrt{|x|}$

$x_0 = 0$ punto di min

$\nexists\ f'(0)$

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \operatorname{int}(A)$, f derivabile 2 volte in x_0, $f'(x_0) = 0$.

1) Se x_0 è punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

2) Se x_0 è punto di massimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

3) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale

4) Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max locale.

Es: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$f'(0) = 0$ $f''(0) > 0$ $f''(x) = 2$

$\Rightarrow$ 0 è di minimo locale.

$f(x) = -x^2$ $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$

$\Rightarrow$ 0 è di max locale.

Se $f''(x_0) = 0$ non potete dire niente

Es:

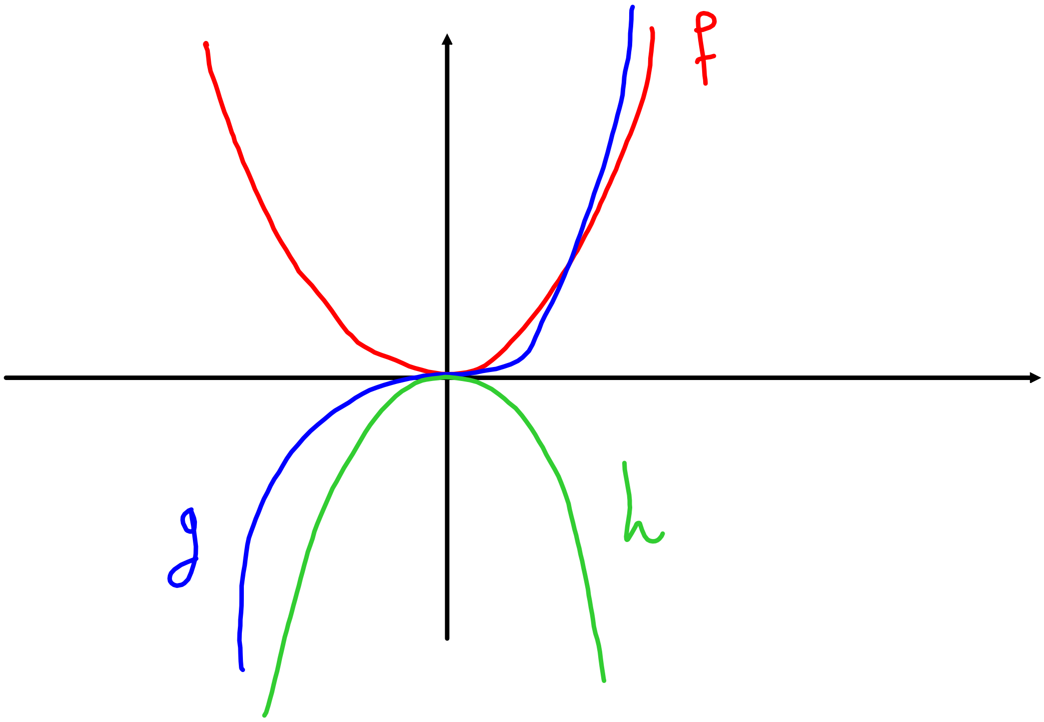
$$f(x) = x^4$$
$$g(x) = x^3$$
$$h(x) = -x^4$$

$f' = 4x^3$, $g' = 3x^2$, $h' = -4x^3$

$f'(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $h'(0) = 0$

$f'' = 12x^2$, $g'' = 6x$ $h'' = -12x^2$

$f''(0) = 0$, $g''(0) = 0$, $h''(0) = 0$


f
g
h

Teorema di de l'Hôpital

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad g, f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

g, f derivabili in (a, b). Se valgono le seguenti ipotesi

1) $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Vale anche per il $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$

$f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$

$g(x) = x^4$

$g' = 4x^3$ non si annulla in un intorno di 0 (a parte in 0)

$f' = -2\sin x + 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

applico de l'Hôpital di nuovo

derivo num. e denomin.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

de l'Hôpital di nuovo

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{24 x} = \frac{1}{12}$$

applicando il teorema ottengo che il limite originale vale $\frac{1}{12}$.

<u>Es</u>: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\frac{f'}{g'} = \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\frac{e^x}{2} \to \frac{+\infty}{2} = +\infty$.

Es: Verificate sempre l'ipotesi 1). Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

se non verificate l'ipotesi 1) e usate de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

Es: Potrebbe esistere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$ ma non esistere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (ipotesi 3).

Es: $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$g'(x) = 1$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\nexists}}{1} = \nexists$$

cosa concludo?

non vale l'ipotesi 3) quindi non posso applicare il teorema di de l'Hôpital se l'avessi applicato e avessi concluso che $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ avrei sbagliato, infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x}}{\cancel{x}} = 0$$

Corollario: Se f è continua in x_0 e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0 e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $\exists\, f'(x_0) = l$.

Oss: Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ non potete concludere che $\nexists f'(x_0)$.

Infatti

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È derivabile in 0?

Calcolo $f'(x)$ per $x \neq 0$.

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 + \nexists = \nexists .$$

non posso concludere che f non ha derivata in 0.

Infatti

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in 0.

Es: $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{e^{-1/0^+}}{0^+} = \frac{e^{-\infty}}{0^+} = \frac{0^+}{0^+}$

de l'Hôpital

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{2x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}$$

potete provare a scriverlo diversamente.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

applico de l'Hôpital.

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} = \frac{x^{-2}}{e^{1/x}}$$

derivo sopra e sotto.

$$\frac{-2x^{-3}}{e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})} =$$

$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} =$

$= -x^{-2}$

moltiplico sopra e sotto per $-x^2$

$$= \frac{2x^{-1}}{e^{1/x}}$$

da l'Hôpital di nuovo

$$\frac{-2x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)} = \frac{2}{e^{1/x}}$$

$$\longrightarrow \frac{2}{e^{1/0^+}} = \frac{2}{e^{+\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Def: dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

si chiama n fattoriale.

per convenzione

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = (3!) \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

$$5! = (4!) \cdot 5 = 120$$

in generale

$$(n+1)! = n!\,(n+1).$$

$$(n+1)! = \underbrace{\left[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\right]}_{n!}(n+1) =$$

$$= n!\,(n+1).$$

Formula di Taylor

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{resto}}$$

posso precisare meglio il resto?

Formula di Taylor con resto di Peano

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Se f è derivabile n-volte in x_0 e almeno $n-1$ -volte in (a,b) allora $\exists$ unico un polinomio di grado $\leq n$ $P_n(x)$ e una funzione resto $R_n(x)$ con la proprietà

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

e $\quad R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$

Il polinomio è di questa forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$$
$$+ f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$R_n(x)$ si dice resto di Peano
e l'unica proprietà che ha è

$$R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$ cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 .$$